問題

次の問いに答えよ。尚、$0 \leq \theta < 2\pi$とする。

（１）$f(\theta) = sin\theta cos\theta$とする時、$f(\theta)$の最大値とその時の$\theta$を求めよ

（２）$sin\theta + cos\theta = \frac{1}{2}$の時、$sin\theta, cos\theta$の値をそれぞれ求めよ

（３）$g(\theta) = cos\theta(sin\theta + cos\theta)$とする時、$g(\theta)$の最大値を求めよ

解説メモ

$sin\theta cos\theta$は殆どの場合「2 倍角」「和の 2 乗」の 2 パターンを考えれば解決できる。今回の 3 題について、全部楽々出来た人もいれば、全て出来なかった人もいるのかな、という所感。

（1）$f(\theta)=sin\theta cos\theta$とする時、$f(\theta)$の最大値とその時の$\theta$を求めよ$(0 \le \theta < 2\pi)$

実は複数の解き方が存在する。

①2 倍角に気づけた場合

2 倍角の公式は、加法定理を用いて、

$$sin2\theta=\sin(\theta+\theta)=sin\theta cos\theta+cos\theta sin\theta=2sin\theta cos\theta$$

と表すことができるから、

$$sin\theta cos\theta=\frac{sin2\theta}{2}$$

と変形できる。よって、

$$f(\theta)=sin\theta cos\theta=\frac{sin2\theta}{2}$$

となる。尚、$0 \le \theta < 2\pi$であるから、$0 \le 2\theta < 4\pi$である。
この時、$sin2\theta$は

$$-1 \le sin2\theta \le 1$$

の値を取るため、$sin2\theta$の最大値は 1 であることが分かる。全ての辺を 2 で割ることで、

$$-\frac{1}{2} \le \frac{sin2\theta}{2} \le \frac{1}{2}$$

となるから、

$$-\frac{1}{2} \le f(\theta) \le \frac{1}{2}$$

であるため、$f(\theta)$の最大値は$\frac{1}{2}$である。この時のθは、

$$sin2\theta=1\ (0 \le 2\theta < 4\pi)$$

を解けばいいから、$2\theta=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$より、$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$となる。

②2 倍角に気づかなかった場合

$$f(\theta)=sin\theta cos\theta=sin\theta\sqrt{(1-\sin^2\theta)}$$

は間違えです。正しくは、

$$f(\theta)=sin\theta cos\theta=\begin{cases} sin\theta\cdot\sqrt{(1-\sin^2\theta)}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\right) \\ sin\theta\left(-\sqrt{(1-\sin^2\theta)}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi,\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 0\left(\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

になります。$cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$ですので、面倒な場合分けが発生してしまいます。そのため、面倒な議論を回避するために、2 乗する方が筋が良いです。

$f(\theta)=sin\theta cos\theta$について、$g(\theta)=f(\theta)^2$を考える

$$g(\theta)=\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta\,(1-\sin^2\theta)$$

$$=\sin^2\theta-\sin^4\theta$$

（ここで、$\sin^2\theta=A$ とする（$0\leq 2\theta\leq 4\pi$より$0\leq\sin^2\theta\leq 1$だから、$0\leq A\leq 1$））

$$=A-A^2$$

$$=-\left(A-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

より、$0\leq A\leq 1$の範囲にて、$A=\frac{1}{2}$の時、最大値$\frac{1}{4}$を取る。以上より、$g(\theta)$の最大値は$\frac{1}{4}$となる。

$g(\theta)=f(\theta)^2$としていたため、$|f(\theta)|=\sqrt{g(\theta)}$と表される。よって、$|f(\theta)|$の最大値は$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$であり、$f(\theta)$の最大値も$\frac{1}{2}$となる。この時の$\theta$を求める。$A=\frac{1}{2}$の時最大となるから、$A=\sin^2\theta$と置いていたことを踏まえると、

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}$$

ここで、$sin\theta cos\theta=\frac{1}{2}$（正）となるためには、$sin\theta, cos\theta$共に同符号になる必要があることを踏まえると、$\theta$は第一象限又は第三象限にあることが分かる。よって、$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$が解となる

③美しく解いた場合（これは出来なくて良い）

$sin\theta cos\theta$は、$sin\theta$と$cos\theta$を足したり引いたりしたものを 2 乗すると出現する。又、実数を 2 乗すると 0 以上である。これらを上手いこと活用すれば、何か見えてくるかもしれない。まず、実数の 2 乗は正であるから

$$(sin\theta-cos\theta)^2\geq 0$$

が成り立つ。展開すると、

$$\sin^2\theta - 2sin\theta cos\theta + \cos^2\theta \geq 0$$

となり、$sin\theta cos\theta$を右辺に移行すると、

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta \geq 2sin\theta cos\theta$$

となる。よって、

$$1 \geq 2sin\theta cos\theta$$

が成り立つから

$$sin\theta cos\theta \leq \frac{1}{2}$$

が分かる。等号が成り立つのは$(sin\theta - cos\theta)^2 = 0$の時である。即ち、

$$sin\theta = cos\theta$$

を解けば良い。しっかり解くと、両辺を$cos\theta(\neq 0)$で割ると、

$$\frac{sin\theta}{cos\theta} = 1$$

となる。$\frac{si}{cos\theta} = tan\theta$を思い出すと、

$$tan\theta = 1$$

を解けば良いということが分かる。従って、$0 \leq \theta < 2\pi$であることを踏まえると、$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$となる。

（２）$sin\theta + cos\theta = \frac{1}{2}$の時、$sin\theta, cos\theta$の値を求めよ$(0 \leq \theta < 2\pi)$

①解と係数の関係を活用した解き方

実は、$sin\theta, cos\theta$の和が分かれば、それぞれの値も求めることが出来ます。初手で「合成」しか思いつかないと、あまり上手く解けないことは想像に難くないでしょう。
１つ抑えておきたいことは、2 数の和と積が求まれば、解と係数の関係に持ち込めるということです。現在、和は求まっていますので、後は積を求めるだけです。両辺を 2 乗すれば、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$より左辺は$2sin\theta cos\theta$が残り、右辺は$\frac{1}{4}$が残りますので、$sin\theta cos\theta$の値を求めることは出来そうです。

$$(sin\theta + cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$$

これを計算すると、

$$2sin\theta cos\theta = -\frac{3}{4}$$

となるから、$sin\theta cos\theta = -\frac{3}{8}$が得られます。

これにより、$sin\theta, cos\theta$の和と積が分かったということになります。

$$\begin{cases} sin\theta + cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta cos\theta = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$sin\theta = \alpha, cos\theta = \beta$とすると、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

となります。こうすれば、解と係数の関係がより具体的に見えるかと思います。2 解α, βについて、

$$\begin{aligned} & t = \alpha, \beta \\ & \Leftrightarrow (t-\alpha)(t-\beta) = 0 \\ & \Leftrightarrow t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\beta = 0 \\ & \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{8} = 0 \\ & \Leftrightarrow 2t^2 - t - \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

を満たすtの方程式の 2 解であると解釈できるから、この 2 次方程式を解くと、

$$t=\frac{1+\sqrt{7}}{4},\frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

となります。よって、$(sin\theta,cos\theta)=\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4},\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right),\left(\frac{1-\sqrt{7}}{4},\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$を求める事ができました。

②代入法による解き方

和と積が分かれば、代入により求めることも出来ます。途中までやることは同一で、$sin\theta=\alpha,cos\theta=\beta$とすると、

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{1}{2}\ldots①\\ \alpha\beta=-\frac{3}{8}\ldots②\end{cases}$$

とおけます。①を変形して$\beta=-\alpha+\frac{1}{2}$とし、②に代入すると、

$$\alpha\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha=-\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2-\alpha-\frac{3}{4}=0$$

これにより、解の公式を解くことで$\alpha(=sin\theta)$を求めることができ、同様に$cos\theta$も求める事ができます。

③差を導出し連立することで解く

$sin\theta+cos\theta=\frac{1}{2}$が分かっているのであれば、$sin\theta-cos\theta$の値が分かれば、両辺を足したり引いたりすることで、各値を求めることが出来ます。前提として、$sin\theta cos\theta=-\frac{3}{8}$は求めているものとしましょう。まず、

$$\begin{aligned}&(sin\theta-cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta-2sin\theta cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2sin\theta cos\theta\\&=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

となるため、$sin\theta-cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$となる。よって、

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2} \ldots ① \\ \sin\theta - \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2} \ldots ② \end{cases}$$

が分かるから、①+②より、$2\sin\theta = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{7}\right)$となるため、$\sin\theta = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{7}\right)$が得られます。よって、①を変形すると、$\cos\theta = -\sin\theta + \frac{1}{2}$より、

$$\cos\theta = -\sin\theta + \frac{1}{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{7}\right)\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 \mp \sqrt{7}\right)$$

となる。従って、$(\sin\theta, \cos\theta) = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right), \left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$が得られる。

誘導付き問題にて、このような手法が用いられることがある。一度は触れておけると良いです。

（３）$g(\theta) = cos\theta(sin\theta + cos\theta)$とする時、$g(\theta)$の最大値を求めよ$(0 \leq \theta < 2\pi)$

$cos\theta$と$sin\theta + cos\theta$を別個で考えても上手く行きません。$cos\theta$が最大だからといって、必ずしも$sin\theta + cos\theta$が最大とは限らないため、結果として$g(\theta)$が最大とは限らないからです。

よって、$g(\theta)$は展開して別の方法で整理する一択です。これを展開すると、

$$g(\theta) = sin\theta cos\theta + \cos^2\theta$$

となる。ここで、

$sin\theta cos\theta$だから、大体２倍角か$sin\theta + cos\theta$の２乗である。$\cos^2\theta$があるから、こっちは２倍角が使えそう。以上より、両方２倍角に変形して合成すればいいんだろうな

という思考回路になれることが重要です。

$g(\theta)$について、$sin\theta cos\theta = \frac{1}{2}sin2\theta, \cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$であることを踏まえると、

$$g(\theta) = sin\theta cos\theta + \cos^2\theta$$
$$= \frac{1}{2}sin2\theta + \frac{1+cos2\theta}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(sin2\theta + cos2\theta) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

これにより、$g(\theta)$の最大値は、$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$の最大値を求めれば分かります。

$A = 2\theta + \frac{\pi}{4}$とすると、$g(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A + \frac{1}{2}$となります。

A の範囲について考えると、まず$0 \leq \theta < 2\pi$より、$0 \leq 2\theta < 4\pi$です。
これにより、$\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{17\pi}{4}$となるため、$\frac{\pi}{4} \leq A < \frac{17\pi}{4}$が得られます。

A の範囲が分かったため、$sinA$の範囲を考えると、$-1 \leq sinA \leq 1$となります。従って、$g(\theta)$の最大値は、$sinA = 1$となる時です。

$sinA = 1$を$\frac{\pi}{4} \leq A < \frac{17\pi}{4}$の範囲で解くと、$A = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$となる。$A = 2\theta + \frac{\pi}{4}$としていたことを思い出すと、$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$より、$2\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$だから、$\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$となります。

これより、$g(\theta)$が最大となるのは$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$が最大になる時であり、その時の$\theta$は

$\theta=\frac{\pi}{8},\frac{9\pi}{8}$となる時であるから、$g(\theta)$の最大値は、

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=g\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

となります